Cálculo del VaR con volatilidad no constante en R.

Julio César Alonso
Paul Semaán

No. 22
Marzo de 2010

Apuntes de Economía

ISSN 1794-029X
No. 22, marzo de 2010

Editor
Julio César Alonso
jcalonso@icesi.edu.co

Gestión Editorial
Departamento de Economía - Universidad Icesi

www.icesi.edu.co
Tel: 5552334 ext: 8398. Fax: 5551441
Calle 18 # 122-135 Cali, Valle del Cauca, Colombia

Cálculo del VaR con volatilidad no constante en R.

Julio César Alonso*

Paul Semaán **

Departamento de Economía
Universidad Icesi
Cali - Colombia

Marzo de 2010

Resumen

En este documento continuamos en la discusión del VaR (Value at Risk) como medida de riesgo de mercado de los activos financieros. Ilustramos de manera práctica y detallada la estimación del VaR empleando la estimación de la varianza abandonando el supuesto de volatilidad constante. Emplearemos por lo tanto tres aproximaciones distintas: La estimación de la varianza móvil, estimación mediante medias móviles con ponderación exponencial (EWMA) y la estimación mediante modelos de la familia GARCH. Posteriormente realizamos pruebas de backtesting. Los ejemplos se realizan para la TCRM, los cálculos son realizados mediante el software gratuito R y los códigos de programación son también reportados. Este documento está dirigido a estudiantes de maestría en finanzas, maestría en economía y últimos semestres de pregrado en economía. Además por la sencillez del lenguaje, puede ser de utilidad para cualquier estudiante o profesional interesado en calcular las medidas mas empeladas de riesgo de mercado.

Palabras claves: VaR, Value at Risk, GARCH, APARCH, EWMA, varianza móvil, riesgo de mercado, R-project, tasa de cambio, TCRM.

*Profesor del departamento de Economía y director del CIENFI (Centro de investigaciones en Economía y Finanzas) jcalonso@icesi.edu.co

**Asistente de investigación del CIENFI.

1. Introducción

En Alonso y Semaán (2009) iniciamos la discusión del cálculo del VaR como medida de riesgo de mercado asociado a un portafolio o activo financiero. Definimos el VaR como la máxima pérdida posible para un determinado horizonte de tiempo y un nivel de significancia α, bajo circunstancias normales de mercado. Formalmente, el VaR para el siguiente período de negociaciones $(T+1)$, dada la información disponible en el periodo actual (T) $(VaR_{T+1|T})$ se define como:

$$P\left(\ z_{T+1} <\ VaR_{T+1|T}\right)\ = \alpha \tag{1}$$

donde z_{T+1} representa el rendimiento (en pesos) futuro del portafolio para el siguiente período. Otra manera de escribir el VaR es:

$$VaR_{T+1|T} = V_0 - V_{c|T} \tag{2}$$

donde V_0 representa el valor en pesos del actual portafolio[1] y $V_{c|T}$ es el valor del portafolio crítico, tal que sólo existe una probabilidad de α de obtener un portafolio con menor valor en $T+1$, dada la información disponible en T.(Alonso y Berggrun (2008))

De hecho, el $V_{c|T}$ se puede expresar como:

$$V_{c|T} = \left(1 + R^c_{T+1|T}\right) V_0 \tag{3}$$

donde $P\left(R_{T+1} <\ R^c_{T+1|T}\right) = \alpha$. Es decir, $R^c_{T+1|T}$ representa el rendimiento del portafolio para el periodo $T+1$ (dada la información disponible en T) tal que sólo existe una probabilidad de α de observar un rendimiento menor a este. Por tanto, 1 y 3 implican:

$$VaR_{T+1|T} = -R^c_T \times V_0 \tag{4}$$

Es fácil demostrar que si los rendimientos del portafolio para el siguiente periodo (R_{T+1}) siguen una distribución cuyos dos primeros momentos son finitos (como la distribución normal o la t), entonces:

$$R^c_{t+1|t} = F(\alpha) \cdot \sigma_{t+1|t} \tag{5}$$

donde $\sigma_{T+1|T}$ representa el valor esperado de la desviación estándar de la distribución de R_{T+1} para el período t y $F(\alpha)$ es el percentil α de la correspondiente distribución (estandarizada).

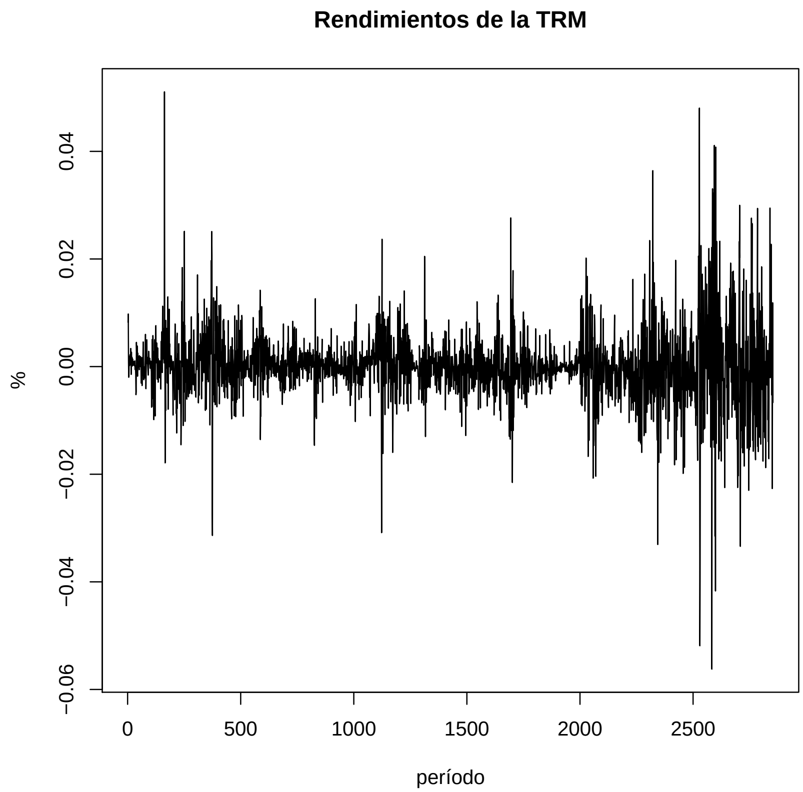
Así, el cálculo del VaR depende crucialmente de dos supuestos respecto al comportamiento de la distribución de R_{T+1} : su volatilidad (desviación estándar $\sigma_{T+1|T}$) y su distribución $F(\cdot)$.

En Alonso y Semaán (2009) mostramos como calcular el VaR bajo el supuesto que la varianza de la serie de los rendimientos es constante. Sin embargo, este es un supuesto muy fuerte pues es claro que los rendimientos presentan el fenómeno denominado "Volatily Clustering", (Ver por ejemplo Alonso y Arcos (2006) para una discusión mas amplia de esta característica). Basta con ver la figura 1, para intuir que el supuesto de que la varianza es constante no parece ser adecuado. En este documento abandonaremos este supuesto y aplicaremos tres reconocidas aproximaciones

[1] En otras palabras, el valor del portafolio en el periodo T.

para la estimación de la varianza. i) el cálculo de la varianza móvil, ii) la estimación mediante medias móviles con ponderación exponencial (EWMA) y iii) la estimación mediante modelos de la familia GARCH.

Figura 1: Rendimientos de la TCRM diaria 1998-2009



Fuente: **Superintendencia Financiera de Colombia y cálculos propios**

Para la ilustración práctica de los conceptos, emplearemos el programa R y los datos de la tasa de cambio diaria pesos/dólar ("TCRM") desde el 2 de enero de 1998 hasta 10 de noviembre de 2009[2].

2. Breve discusión teórica de los modelos de volatilidad no constante.

A continuación se describen tres aproximaciones con filosofías diferentes i) Modelo de media móvil, ii) Modelo EWMA, y iii) los modelos econométricos de la familia GARCH.

[2]Este documento está acompañado de un archivo de Excel que contiene los datos necesarios para replicar todos los resultados reportados en este documento.

2.1. Modelo con Varianza Móvil

Tal vez la manera mas simple de modelar la varianza de los rendimientos como un parámetro que cambia en el tiempo es emplear una varianza "móvil". Es decir, una varianza que va cambiando de acuerdo con la nueva información que se va recopilando en los últimos n días. Formalmente, podemos expresar la varianza del rendimiento empleando los últimos n datos de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_{t,n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_{t-i} - \bar{R}_n\right)^2}{n}$$

donde $\hat{\sigma}_{t,n}^2$ y $\bar{R}_n$ corresponden a la varianza estimada para el período t y la media de los rendimientos ambos calculados a partir de los últimos n datos. Por otro lado, como es sabido, los rendimientos diarios comúnmente exhiben una media que estadísticamente no difiere de cero (ver Alonso y Arcos (2006)). Así, bajo el supuesto que la media es cero la expresión será:

$$\hat{\sigma}_{t,n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(R_{t-i}\right)^2}{n} \tag{6}$$

Como lo sugieren Alonso y Berggrun (2008) no es fácil determinar el n. Para escoger qué tamaño de ventana (n) permite modelar mejor el comportamiento de la volatilidad de los rendimientos, se puede emplear una medida de bondad de ajuste.

La idea de emplear medidas de bondad de ajuste es muy sencilla. Empleando las observaciones ya existentes debemos determinar cuál de los modelos se acerca más a los valores observados empleando las medidas de ajuste. Típicamente, se emplea una parte de la muestra para evaluar cuál de los diferentes valores de n provee estimaciones de la varianza más cercanas a lo observado. Lastimosamente, la varianza (σ_t^2) de los rendimientos no es observable. Pero dado que se espera que la media de los rendimientos sea cero, podemos aproximarnos a la volatilidad real empleando el rendimiento al cuadrado[3] (R_t^2).

Una medida de bondad de ajuste es la **raíz cuadrada del error cuadrático promedio** ($RCECP$)[4]. Esta medida compara la varianza estimada $\hat{\sigma}_t^2$ para un periodo t y (R_t^2). Específicamente, el $RCECP$ calcula la desviación cuadrada promedio entre el valor estimado y el observado. Es decir:

$$RCECP = \sqrt{\frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} \left(R_t^2 - \hat{\sigma}_t^2\right)^2} \tag{7}$$

donde H corresponde al número de "predicciones" con las cuales se evaluará la bondad de ajuste de los diferentes modelos. Es decir, H corresponde a cuantas veces se calcula la varianza. Dado que esta medida recoge la diferencia que existe entre cada valor estimado y el observado, de tal manera que un $RCECP$ menor será considerado mejor que uno grande.

[3] Esta aproximación tiene sentido pues, $Var\left[W\right] = E\left[W^2\right] - \left(E\left[W\right]\right)^2$. Suponiendo que la media es cero ($E\left[W\right] = 0$), tendemos que $Var\left[W\right] = E\left[W^2\right]$

[4] Esta medida también es conocida como $RMSE$ por la sigla del inglés de "Root mean square error"

Otra medida de bondad de ajuste es el **error absoluto medio porcentual** ($EAMP$). Este criterio mide que tan grande son los errores de los pronósticos en términos porcentuales:

$$EAMP = \frac{1}{H} \sum_{t=1}^{H} \left| \frac{R_t^2 - \hat{\sigma}_t^2}{R_t^2} \right| \tag{8}$$

Y finalmente consideraremos otra medida de bondad de ajuste, la **raíz cuadrada del error cuadrático promedio porcentual** ($RCECPP$). Este criterio penaliza los errores porcentuales mayores:

$$RCECPP = \sqrt{\frac{1}{H}\sum_{t=1}^{H} \left(\frac{R_t^2 - \hat{\sigma}_t^2}{R_t^2} \right)^2} \tag{9}$$

Así, empleando estos tres criterios de ajuste, podemos comparar que tan "bueno" es emplear determinado n.

2.2. Modelo EWMA

El EWMA (por su nombre en inglés Exponential Weighted Moving Average) pondera de manera diferente cada observación de tal forma que asigna mayor peso a las observaciones más recientes. De acuerdo con el EWMA, la varianza en el periodo t es:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) R_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 \tag{10}$$

donde λ corresponde al factor de decaimiento y toma valores entre 0 y 1. La ecuación (10) implica que la varianza de hoy será igual a λ veces la volatilidad del día anterior más el cuadrado de la rentabilidad del día anterior (Ver Alonso y Berggrun (2008) para mayor detalle de la derivación de esta fórmula).

J.P. Morgan popularizó esta metodología cuando el nuevo presidente de esta compañía Dennis Weatherstone, solicitó un informe diario para medir el riesgo de su compañía. Cuatro años después en 1992 J.P. Morgan lanzó al mercado la metodología RiskMetrics, que no es más que emplear un modelo $EWMA$ con un λ de 0.94 para datos diarios y de 0.97 para datos mensuales.

Una práctica común es emplear las medidas de bondad de ajuste para determinar cuál valor de λ es el más adecuado.

2.3. Modelo con Volatilidad Estimada Mediante modelos GARCH

El avance de las técnicas de series de tiempo, en especial las que se concentran en modelar el segundo momento de los rendimientos de los activos financieros (la volatilidad) ha permitido encontrar regularidades en el comportamiento de las series financieras (Ver por ejemplo Alonso y Arcos (2006)). Esas regularidades implican la necesidad de emplear modelos cada vez más sofisticados para la volatilidad con el fin de remover el supuesto de volatilidad constante. El primero en notar regularidades en estas series fue Mandelbrot (1963), sin embargo son Engle (1982) y Bollerslev (1986) quienes trazaron un camino claro en el desarrollo de los modelos que conducen al análisis de la varianza.

Un modelo muy empleado es el de heteroscedasticidad condicional auto-regresiva generalizado, GARCH(p,q) por su nombre en inglés. En este caso tenemos que la media de los rendimientos depende de una constante (μ) y de un término de error:

$$R_t = \mu + \upsilon_t \tag{11}$$

En este modelo suponemos que la varianza condicional (σ_t^2) de los rendimientos seguirá el siguiente comportamiento:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \upsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \tag{12}$$

con $p, q, \alpha_i, \beta_i \geq 0$ y $\alpha_0 > 0$. Este modelo es una generalización del modelo ARCH donde la varianza condicional depende no sólo de los p cuadrados anteriores de las innovaciones, sino también de los q valores pasados de la misma varianza. En la literatura académica financiera generalmente se estiman modelos GARCH(1,1) los cuales han demostrado capturar adecuadamente la volatilidad condicional autorregresiva. De esta manera la varianza del siguiente periodo se podrá encontrar a partir del modelo GARCH(1,1) empleando la siguiente expresión:

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}\hat{\upsilon}_{t-1}^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2 \tag{13}$$

Un modelo mas general que el GARCH(p,q) es el APARCH(p,q) (Asymmetric Power ARCH) de Ding et al. (1993). Este modelo permite estimar no solo la varianza sino otros momentos de la distribución de los rendimientos. En general, este modelo tiene una mayor flexibilidad al contener una buena cantidad de modelos anidados en el. Si nos concentramos en lo que ocurre con la varianza, el APARCH(p,q) captura la presencia de comportamientos asimétricos en la varianza. Es decir, rentabilidades negativas están asociadas comúnmente a mayores varianzas condicionales que cuando la rentabilidad es positiva. Esta asimetría generalmente se le atribuye a los efectos de apalancamiento (leverage effects) comúnmente observados en el comportamiento de los rendimientos de los activos financieros.

Para el modelo APARCH(p,q) de Ding et al. (1993) la media de los rendimientos sigue siendo 11 y el momento δ corresponde a:

$$\sigma_t^{\delta} = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|\upsilon_{t-i}| - \gamma_i \upsilon_{t-i})^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta} \tag{14}$$

donde γ_i representa el efecto apalancamiento. En nuestro caso nos interesa el caso especial en el que $\delta = 2$[5]. En la practica, al igual que en el caso del modelo GARCH, no es frecuente que p y q sean mayores a uno. Así, tenemos que la varianza del modelo APARCH(1,1) será:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 (|\upsilon_{t-1}| - \gamma_i \upsilon_{t-1})^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{15}$$

Así, un valor de γ positivo implica que los impactos negativos tienen un mayor efecto sobre la varianza que aquellos que son positivos. Si $\gamma = 0$ entonces tendremos el modelo GARCH.

En el caso de emplear un modelo APARCH(1,1) la varianza para el siguiente periodo se puede estimar de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}_1 (|\hat{\upsilon}_T| - \hat{\gamma}_i \hat{\upsilon}_T)^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_T^2 \tag{16}$$

[5]En el caso especial en el que $\delta = 2$ el modelo APARCH se convierte en el modelo GJR-GARCH (por las iniciales de sus autores Glosten, Jagannathan y Runkle), también conocido como TGARCH (Treshold GARCH).

3. Calculando el VaR con volatilidad no constante

Regresando al calculo del VaR, recuerde que hemos definido el VaR de la siguiente forma:

$$VaR_{T+1|T} = -R_T^c \times V_0 \tag{17}$$

donde

$$R_{T+1|T}^c = F(\alpha) \cdot \sigma_{T+1|T} \tag{18}$$

En términos generales los pasos necesarios para la estimación del VaR son:

1. Estimar un modelo para pronosticar la varianza de los rendimientos.
2. Proyectar la desviación estándar del rendimiento para el periodo $T+1$.
3. Calcular $R_{T+1|T}^c = F(\alpha) \times \hat{\sigma}_{T+1|T}$
4. Calcular el $VaR_{T+1|T} = -R_T^c \times V_0$

En las siguientes secciones ilustraremos el cálculo del VaR con un nivel de confianza del 99 % empleando el programa estadístico *R* para cada una de las filosofías discutidas para modelar la varianza: i) Modelo de media móvil, ii) Modelo EWMA, y iii) los modelos econométricos de la familia GARCH.

Antes de entrar en el detalle es importante cargar los datos y crear la serie de los rendimientos. Para tal fin podemos emplear las siguientes líneas de código para *R*.

```
> tcrm<-read.csv("TCRM.csv", sep=",") # leemos los datos
> tcrm<-ts(tcrm, frequency=1)         # convierte los datos en serie de tiempo
> rtcrm<-diff(log(tcrm))              # cálculo de los retornos
```

Una vez los datos han sido leídos podemos constatar que si contamos con la misma información con la que se desarrollará los siguientes cálculos. Por ejemplo, podemos obtener las estadísticas descriptivas reportadas en la tabla 1 y el gráfico 2 empleando las siguiente líneas[6]:

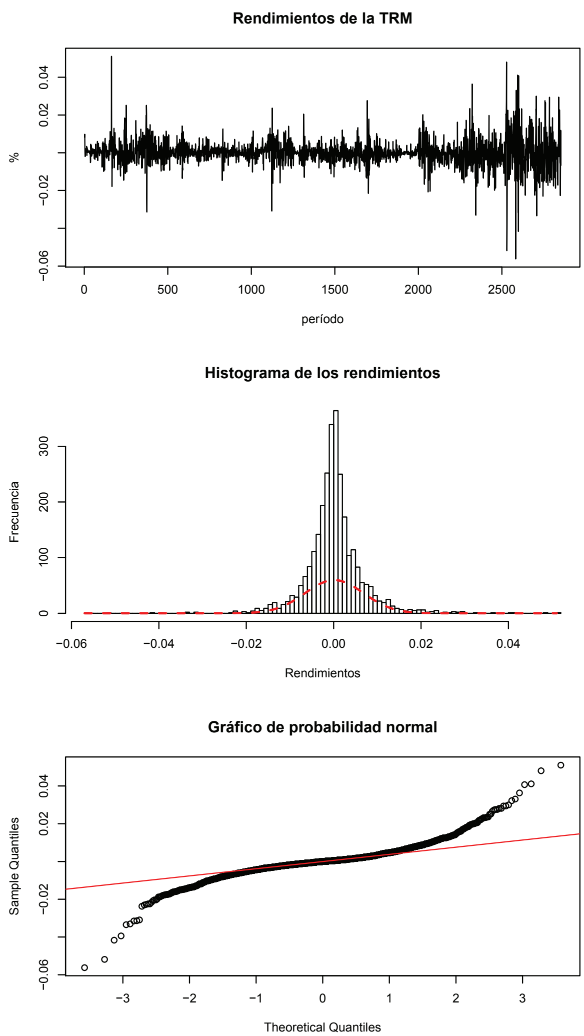
```
> summary(rtcrm)
>
>  par(mfrow=c(3,1))
>  plot(rtcrm,col="blue", xlab = "período", ylab = "\%", main = "Rendimientos de
>  la TRM", type = "l")
>  hist(rtcrm, col="blue", 100, xlab = "Rendimientos", ylab = "Frecuencia",
>  main= "Histograma de los rendimientos")
>
>  curve(dnorm(x, mean=mean(rtcrm), sd=sqrt(var(rtcrm))),
>  to=max(rtcrm), col = 2, lty = 2, lwd = 2, add = TRUE)
>  qqnorm(rtcrm, col="blue", main="Gráfico de probabilidad normal")
>  qqline(rtcrm, col=2)
```

[6] Asegúrese que puede reproducir totalmente estos resultados. Si no lo puede hacer, por favor cargue de nuevo los datos.

Cuadro 1: Estadísticos descriptivos

2Min.:	-5.622e-02
1st Qu.:	-2.590e-03
Median:	-5.440e-08
Mean:	1.472e-04
3rd Qu.:	2.537e-03
Max.:	5.107e-02

Figura 2: Estadísticos descriptivos



3.1. Cálculo del VaR por medio de una varianza estimada con media móvil

El primer paso para calcular el VaR es ***encontrar el mejor modelo para la varianza de los rendimientos.*** En este caso emplearemos la media móvil para modelar la varianza.

El paquete TTR permite calcular de manera ágil una media móvil para un conjunto de datos empleando la función "SMA"[7] que nos permitirá calcular la expresión (6). Para emplear este método será necesario determinar cual es la ventana de datos n que se ajusta mejor a los datos. En nuestro caso consideraremos las ventanas (n) de 2, 5, 7, 15, 30, 60 y 90 días. Para tal fin, podemos aplicar la función "SMA" al cuadrado de los rendimientos (Ver ecuación (6)) mediante las siguientes líneas de código.

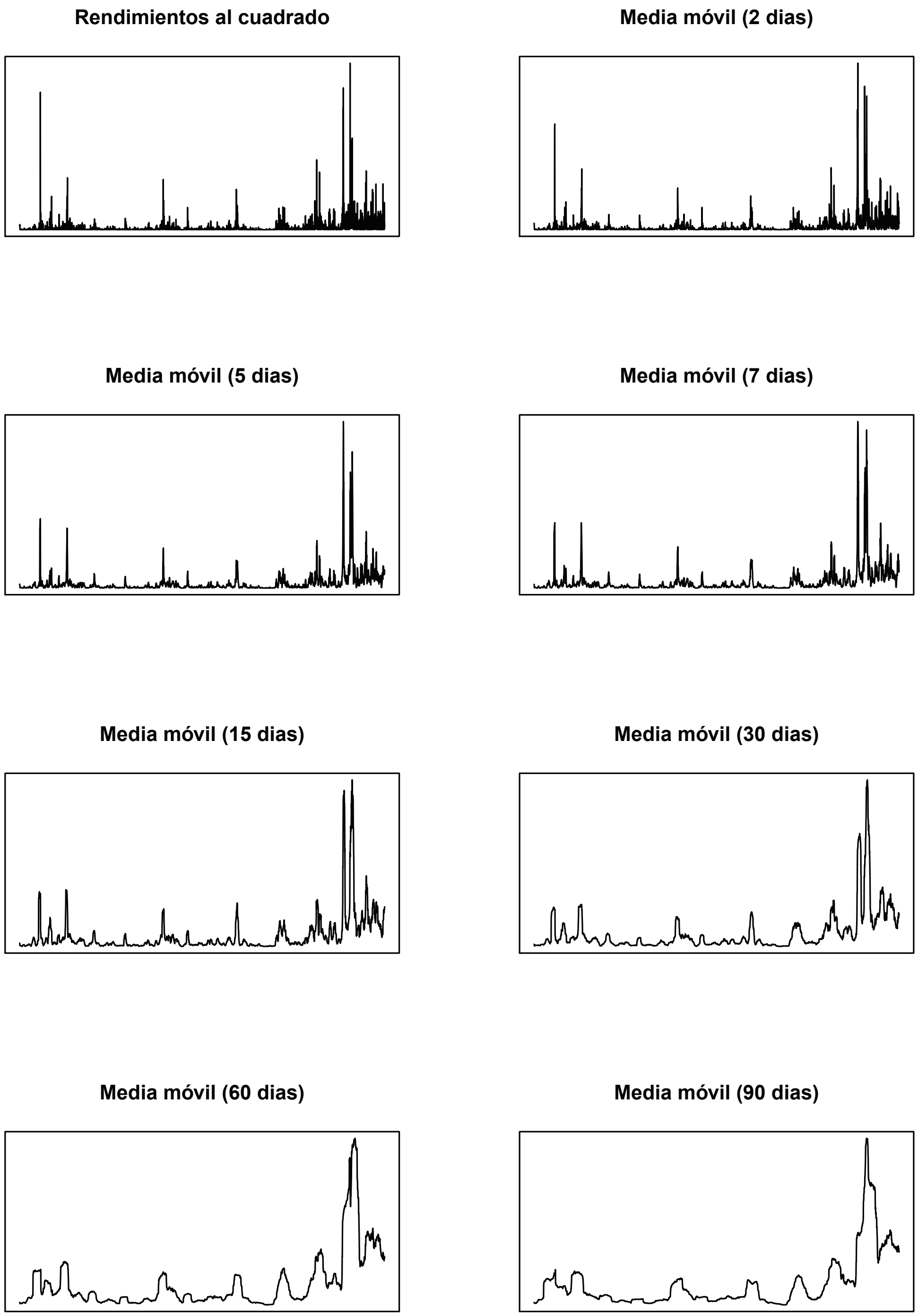
```
> library(TTR)                  #cargamos el paquete TTR
> rtcrm2<-rtcrm^2               #cálculo del cuadrado de los rendimientos
> var.mov2<-SMA(rtcrm2, n=2)    #varianza móvil con n=2
> var.mov5<-SMA(rtcrm2, n=v5)
> var.mov7<-SMA(rtcrm2, n=v7)
> var.mov15<-SMA(rtcrm2, n=v15)
> var.mov30<-SMA(rtcrm2, n=v30)
> var.mov60<-SMA(rtcrm2, n=v60)
> var.mov90<-SMA(rtcrm2, n=v90)
```

En la figura 3 se presentan los gráficos de los rendimientos al cuadrado y de cada una de las medías móviles de la varianza para cada tamaño de ventana n. Este es el código con el que generamos estos gráficos:

```
> layout(matrix(c(1,2,3,4,5,6,7,8), 4, 2, byrow=TRUE))
> plot(rtcrm2, xlab = "", ylab= "",  main = "Rendimientos al cuadrado", yaxt="n",
  xaxt="n", type = "l")
> plot(var.mov2, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (2 dias)", yaxt="n",
  xaxt="n",type = "l")
> plot(var.mov5, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (5 dias)", yaxt="n",
  xaxt="n",type = "l")
> plot(var.mov7, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (7 dias)", yaxt="n",
  xaxt="n",type = "l")
> plot(var.mov15, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (15 dias)", yaxt="n",
  xaxt="n",type = "l")
> plot(var.mov30, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (30 dias)", yaxt="n",
  xaxt="n",type = "l")
> plot(var.mov60, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (60 dias)",yaxt="n",
  xaxt="n", type = "l")
> plot(var.mov90, xlab = "", ylab= "", main = "Media móvil (90 dias)", yaxt="n",
  xaxt="n",type = "l")
```

[7] La función SMA sólo necesita dos argumentos: las observaciones y el número de datos que se emplearán para la ventana n.

Figura 3: Rendimientos al cuadrado y varianza móvil



Como se discutió anteriormente, para escoger el tamaño ideal de la ventana n podemos emplear medidas de bondad de ajuste como el RCECP, el EAMP y el RCECPP. Para calcular estas medidas de ajuste podemos crear en R la siguiente función[8].

```
> b.ajuste <- function(observado, pronostico){
>    # observado = vector columna con observaciones de la serie evaluada
>    # pronóstico = vector columna de pronósticos
>    # calcula RCECP, EAMP y RCECPP
>
>    error<- observado-pronostico
>    RCECP  <-  mean(error^2)
>    EAMP   <-  mean(abs(error/ observado))
>    RCECPP <- mean((error / observado)^2)
>    return((list(RCECP=RCECP, EAMP=EAMP, RCECPP=RCECPP)))}
```

La función "b.ajuste" que acabamos de crear empleará como argumentos la serie observada y su respectivo pronóstico y como resultado obtendremos las tres medidas de bondad de ajuste discutidas.

Empleando las últimas 100 observaciones (H=100) para encontrar el modelo encontramos los resultados de las estadísticas de bondad de ajuste que se reportan en el cuadro 2. Los resultados de la tabla se obtienen empleando líneas de código como las siguientes.

```
>  H=100
>   j.fin=length(rtcrm2)
>   j.ini= j.fin -H +1
>   j.ini.pro =  length(var.mov2)-H
>   j.fin.pro = length(var.mov2)-1
>   ajuste.n2<-b.ajuste( rtcrm2[j.ini:j.fin], var.mov2[(j.ini.pro):(j.fin.pro)])
>   ajuste.n2
```

De acuerdo a los resultados reportados en el cuadro 2 podemos concluir que de acuerdo al criterio RCEECP la mejor ventana es de 90 observaciones, mientras que los otros dos criterios sugieren una ventana de 5 observaciones. Entonces, de acuerdo a la mayoría, haremos el cálculo del VaR con una ventana de 5 observaciones.

[8] Asegúrese de entender los pasos que se realizan e intente realizar usted mismo una programación distinta

Cuadro 2: Medidas de bondad de ajuste para diferentes ventanas

Tamaño de ventana	RCECP	EAMP	RCECP
2	0.000225269	349.1319	3150.359
5	0.000190146	**272.8358**	**2119.321**
7	0.00018872	308.3898	2559.549
15	0.00018089	324.2295	2639.889
30	0.000179963	387.0081	3248.68
60	0.000178175	421.9631	3369.301
90	**0.000177057**	383.5499	2982.429

Para este cálculo emplearemos el método paramétrico que supone una distribución normal (ver Alonso y Berggrun (2008)) y dónde el VaR es calculado de acuerdo a (17).

El segundo paso para calcular el VaR es ***proyectar la varianza del rendimiento.*** Para $n = 5$, podemos encontrar la desviación estándar para $T+1$ muy facilmente, empleando el siguiente código.

```
> se.medmov<-(var.mov5[length(var.mov5)])^(1/2)
```

El tercer paso para encontrar el VaR es ***calcular*** $R^c_{T+1|T} = F(\alpha) \times \hat{\sigma}_{T+1|T}$. Para realizar este cálculo, debemos entonces encontrar el estadístico correspondiente a una distribución normal estándar (en este caso con un 1 % de significancia) y multiplicarlo por la desviación calculada en el paso 2.

```
> rt.med.mov<-qnorm(0.005)*se.medmov
```

Finalmente, el VaR se puede encontrar al ***calcular el*** $VaR_{T+1|T} = -R^c_T \times V_0$. Empleando el $R^c_{T+1|T}$ del paso 3 y multiplicandolos por el valor inicial del portafolio (V_0). Dado que nos interesa conocer el VaR en pesos, entonces debemos multiplicar el valor inicial (V_0) por la última tasa de cambio ($tcrm[length(tcrm)]$)

```
> V0<-10000                              #cantidad de dólares
> V0.pesos<-10000*tcrm[length(tcrm)]  #valor en pesos del portafolio
> VaR.med.mov<- -rt.med.mov*V0.pesos
```

Obtenemos un valor para el VaR de 626,057.2. Es decir si tenemos un portafolio de U$10,000 dólares, para el siguiente día podemos perder con un nivel de confianza del 99 % la suma de $626,057.2 pesos.

En resumen, los 4 pasos para calcular el VaR se pueden condensar todos en una función (por ejemplo "VaR.MA") como la siguiente [9].

```
>  VaR.MA<- function (datos, alfa, n){
>    # datos = vector columna con obs. de los precios del activo (objeto ts)
```

[9] Esta función calcula el VaR por cada dólar invertido.

```
>    # alfa = nivel de significancia para el cálculo del VaR
>    # calcula VaR para el siguiente periodo
>      rend<-diff(log(datos))
>      var.MA<-SMA(rend^2, n=n)
>      se.MA<-(var.MA[length(var.MA)])^(1/2)
>      VaR<--qnorm(alfa/2)*se.MA*datos[length(datos)]
>   return(VaR=VaR)}
```

Esta función puede ser empleada para calcular el VaR de la siguiente manera.

```
> VaR.MA(tcrm, 0.01, 5)*V0
```

Noten que obtenemos el mismo resultado.

3.2. Cálculo del VaR por medio de una varianza estimada con ponderaciones exponenciales "EWMA"

Para realizar el primer paso del calculo del VaR (***encontrar el mejor modelo para la varianza de los rendimientos***), se debe encontrar el λ que permita modelar mejor la varianza para este caso. De igual manera que lo realizado para el caso de la media móvil, calcularemos la varianza para diferentes valores de λ y seleccionaremos el mejor lambda para pronosticar las últimas 100 observaciones de nuestra muestra. Por ejemplo empleemos $\lambda = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, \ldots, 0.95$ y de 0.94(el λ correspondiente a RiskMetrics).

Para realizar los cálculos emplearemos la función "emaTA" del paquete *fTrading*. Función que solo necesita dos argumentos: i) las observaciones de la variable bajo estudio y λ. Por ejemplo, para calcular el varianza del rendimiento empleando el EWMA (expresión (10)) para $\lambda = 0.94$ (RiskMetrics) podemos emplear la siguiente línea de código.

```
> library(fTrading)
> ewma.riskMetrics <- emaTA(rtcrm2, lambda = 0.94)
```

De manera similar podemos realizar el cálculo para las otros 19 valores de λ considerados. Para cada una de esas 20 series (cada una para un λ diferente) podemos calcular las tres medidas de bondad de ajuste empleando la función "b.ajuste". Por ejemplo, para el caso de RiskMetrics las métricas de bondad de ajuste se pueden calcular con la siguiente línea.

```
> b.ajuste( rtcrm2[j.ini:j.fin], ewma.riskMetrics[j.ini:j.fin])
```

Realizando un cálculo similar para cada uno de los 20 valores de λ obtenemos los resultados reportados en el cuadro 3

Cuadro 3: Métricas de bondad de ajuste para diferentes $\lambda's$

λ	RCECP	EAMP	RCECPP
0.05	1.705031e-04	371.894932	3053.24077
0.1	1.637321e-04	323.977402	2693.85945
0.15	1.569711e-04	284.339273	2364.13930
0.2	1.501289e-04	252.289940	2096.42357
0.25	1.431119e-04	226.114839	1881.41226
0.3	1.358743e-04	204.002257	1702.41046
0.35	1.283890e-04	184.490126	1545.33651
0.4	1.206363e-04	166.620269	1401.05337
0.45	1.125991e-04	149.820402	1264.26770
0.5	1.042611e-04	133.746876	1131.96453
0.55	9.560595e-05	118.190093	1002.39153
0.6	8.661685e-05	103.021728	874.59932
0.65	7.727580e-05	88.178835	748.29276
0.7	6.756327e-05	73.658280	623.79284
0.75	5.745740e-05	59.515265	502.00822
0.8	4.693321e-05	45.858635	384.38722
0.85	3.596178e-05	32.850878	272.85560
0.9	2.450946e-05	20.699214	169.75435
0.95	**1.253720e-05**	**9.653012**	**77.78957**
0.94	1.497532e-05	11.760535	95.15037

Como se puede observar, con las tres medidas de bondad de ajuste concluimos que la mejor opción de λ es 0.95. Con esto en mente, podemos proceder al segundo paso del calculo del VaR (***proyectar la varianza del rendimiento.***). Para esta proyección utilizamos la ultima varianza estimada por medio del EWMA.

```
> ewma.std <- (emaTA(rtcrm2, lambda = 0.95))^(1/2)
> std.ewma<-ewma.std[length(ewma.std)]
```

Ahora, debemos para ***calcular*** $R^c_{T+1|T} = F(\alpha) \times \hat{\sigma}_{T+1|T}$, podemos emplear el siguiente comando.

```
> rt.ewma<-qnorm(0.005)* std.ewma
```

Y finalmente, para ***calcular el*** $VaR_{T+1|T} = -R^c_T \times V_0$, podemos escribir las siguientes líneas.

```
> V0.pesos<-10000*tcrm[length(tcrm)]
> var.ewma<- -rt.ewma*V0.pesos
```

Para un portafolio de U$10,000 obtenemos un VaR para el siguiente día de $354,723 pesos.

Podemos escribir una función como la siguiente que resuma los pasos anteriores para el cálculo del VaR[10] ("VaR.EWMA").

[10] Esta función calcula el VaR por cada dólar invertido.

```
> VaR.EWMA<- function (datos, alfa, lambda){
> # datos = vector columna con obs. de los precios del activo (objeto ts)
> # alfa = nivel de significancia para el cálculo del VaR
> # calcula VaR para el siguiente periodo
>    rend<-diff(log(datos))
>    var.EWMA<-emaTA(rend^2, lambda = lambda)
>    se.EWMA<-(var.EWMA[length(var.EWMA)])^(1/2)
>    VaR<-  -qnorm(alfa/2)*se.EWMA*datos[length(datos)]
>   return(VaR=VaR)}
```

En este caso podemos replicar el resultado del VaR que obtuvimos anteriormente mediante:

```
> VaR.EWMA(tcrm, 0.01, 0.95)*V0
```

3.3. Cálculo del VaR por medio de una varianza estimada con modelos de la familia GARCH

Para el cálculo de la varianza estimada por medio de los modelos de la familia GARCH podemos considerar el modelo más general: APARCH. Después de estimar este modelo, podemos decidir si es mejor emplear un modelo APARCH o uno GARCH, probando si el parámetro γ es estadísticamente distinto de cero.

Para la estimación del modelo APARCH el paquete de *R* llamado *fGarch*; en especial, la función "garchFit". La función "garchFit" tiene varios argumentos, entre los más importantes están:

- la fórmula del modelo que se va estimar. Para el caso de un modelo APARCH(p,q), la fórmula será aparch(p,q); mientras que para el caso de un GARCH(p,q), la fórmula será garch(p,q).
- los datos con los que se estimará el modelo (data)
- la ditribución condicional de los residuos (cond.dist). En nuestro caso emplearemos una distribución normal, por tanto emplearemos la opción cond.dist= "norm"
- para el caso del modelo APARCH, si se desea estimar δ de la expresión (14) ("include.delta"). Para nuestro caso nos interesa la varianza (δ =2), entonces la opción adecuada para la función "garchFit" será "include.delta = FALSE".

.

A continuación se presenta las líneas que permiten estimar los modelos APARCH(1,1) y GARCH(1,1) con la función "garchFit".

El primer paso es encontrar el mejor modelo para la varianza de los rendimientos.

```
> library(fGarch)
> #estimación del modelo APARCH(1,1)
> aparch11<-garchFit(formula = ~ aparch(1, 1), data = rtcrm,
  cond.dist= "norm", include.delta = FALSE)
> #estimación del modelo GARCH(1,1)
> garch11<-garchFit(formula = ~ garch(1, 1), data = rtcrm, cond.dist = "norm")
```

Los resultados de la estimación del modelo APARCH(1,1) y GARCH(1,1) se reportan en el cuadro 4. De la estimación del modelo APARCH(1,1) podemos concluir que el parámetro δ no es estadísticamente diferente de cero. Es decir, no existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de que no existe efecto apalancamiento en la serie de la TCRM para la muestra considerada. De esta manera, concluimos que la serie de tiempo analizada no presenta una característica de asimetría que pueda capturar este modelo. Y por lo tanto, el modelo GARCH(1,1) parece modelar mejor el comportamiento de la varianza de los rendimientos.

Cuadro 4: Modelos Estimados

	APARCH(1,1)			GARCH(1,1)		
	Estimación	t-valor		Estimación	t-valor	
μ	-5.571e-05	-0.865		-7.923e-05	-1.291	
ω	3.304e-07	5.286	***	3.252e-07	5.276	***
α	2.499e-01	12.047	***	2.510e-01	12.156	***
γ	-2.989e-02	-1.255				
β	7.8264e-01	56.378	***	7.829e-01	55.942	***

(*) nivel de significancia: 10 %

(**) nivel de significancia: 5 %

(***) nivel de significancia: 1 %

El segundo paso para el cálculo del VaR implica ***proyectar la varianza del rendimiento.***. Esta proyección se puede llevar a cabo fácilmente, por medio de la función "predict". Esta función permite realizar el número de proyección de un paso a delante que se deseen (n-step-ahead en inglés) para cualquier objeto fGARCH. En nuestro caso, queremos crear a partir del modelo GARCH(1,1) estimado (guardado en el objeto "garch11") la proyección de un sólo periodo adelante ($T+1$) ("n.ahead = 1"). Esta predicción se obtiene por medio de la siguiente línea.

```
> fore.garch<-predict(garch11, n.ahead = 1)
```

El siguiente paso para encontrar el VaR es ***calcular*** $R^c_{T+1|T} = F(\alpha) \times \hat{\sigma}_{T+1|T}$. Este paso se obtiene de la siguiente manera.

```
> rt.garch<-qnorm(0.005)*fore.garch[1,3]
```

Finalmente, para ***calcular el*** $VaR_{T+1|T} = -R^c_T \times V_0$. Podemos emplear una línea de código muy parecida a la empleada en los dos casos anteriores.

```
> VaR.garch<- -rt.garch*V0.pesos
```

Para un portafolio de U$10,000, empleando un modelo GARCH(1,1), obtenemos un VaR de $623,329 pesos para el siguiente día.

Así como lo hemos realizado para los dos métodos anteriores, es posible crear una función en *R* para calcular el VaR por medio de un modelo GARCH(1,1) con un solo comando. La función puede ser como la siguiente.

```
>  VaR.GARCH<- function (datos, alfa){
>     # datos = vector columna con obs. de los precios del activo (objeto ts)
>     # alfa = nivel de significancia para el cálculo del VaR
>     # calcula VaR para el siguiente periodo
>
>     rend<-diff(log(datos))
>     res<-garchFit(formula = ~ garch(1, 1), data = rend, cond.dist = "norm")
>     se.GARCH<-fore.garch<-predict(res, n.ahead = 1) [1,3]
>     VaR<-  -qnorm(alfa/2)*se.GARCH*datos[length(datos)]
>     return(VaR=VaR)}
```

El VaR con la aproximación GARCH se puede calcular de la siguiente manera.

```
>  VaR.GARCH(tcrm, 0.01)*V0
```

4. Backtesting de las estimaciones

Hasta aquí hemos discutido como calcular el VaR con tres diferentes "filosofías" cuando dejamos de suponer que la varianza es constante. Pero ahora la pregunta es, ¿cuál de las tres aproximaciones brinda una mejor estimación del VaR? La respuesta a esta pregunta no es sencilla, pues implica de alguna manera conocer el valor real del VaR, que por supuesto no es observable.

Tal como hemos definido el VaR, una manera muy práctica de probar el ajuste de los modelos es probar cuál es la proporción en que se observa una pérdida superior a la predicción del modelo VaR, esto se conoce en la literatura como las excepciones. Esta proporción no debería ser (en promedio) diferente al nivel de significancia.

La prueba de Kupiec (1995) permite probar la hipótesis nula de que la proporción de excepciones sea igual a α versus la alterna de no H_0. Definamos la proporción de las excepciones de la siguiente manera:

$$\hat{p} = \frac{\#\ de\ excepciones}{H} \tag{19}$$

donde H es el número total de predicciones.

Para evaluar la hipótesis nula que la proporción de excepciones (p) es igual a la esperada teóricamente ($alpha$) ($H_0 : \hat{p} = \alpha$), se puede emplear el siguiente estadístico t de Kupiec (1995):

$$t_U = \frac{\hat{p} - \alpha}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/H}} \tag{20}$$

Kupiec (1995) demostró que t_U sigue una distribución t con $H - 1$ grados de libertad.

La prueba de Kupiec (1995) se puede realizar empleando una pequeña función escrita en R[11].

```
> kupiec.est<-function(p.gorro, alfa, H)  {
> # argumentos:
> #p.gorro = proporción de excepciones observadas (en decimales)
```

[11] Asegúrese de entender los pasos que se realizan e intente realizar usted mismo una programación distinta

```
> #alfa = proporción esperada teóricamente (en decimales)
> #H = número de observaciones empleadas para la evaluación.
> # Resultados
> # t_u = estadístico de Kupiec
> # p-valor= valor p del estadístico de Kupiec de dos colas.
>   tu<- (p.gorro - alfa) / sqrt((p.gorro*(1-p.gorro))/H)
>   pvalor <- (1 - pt(abs(tu),H-1))*2 # dos colas
>   return((list(t_u=tu, p_valor=pvalor)))
>         }
```

Para realizar esta evaluación tendremos en cuenta los lineamientos del Acuerdo de Basilea II que recomienda trabajar con una muestra de evaluación no inferior a 250 observaciones diarias. Teniendo en cuenta que contamos con 2852 datos del rendimiento diario de la tasa de cambio representativa de mercado, entonces si calculamos inicialmente el VaR con los primeros 2603 datos, podremos contar con 250 periodos (H) para realizar la prueba de Kupiec expresada en 19. Este procedimiento, implica realizar el cálculo del VaR para el periodo 2604 y comparar dicho VaR con la perdida (o ganancia) del portafolio en pesos observada en ese periodo. Posteriormente se agregará una observación más a la muestra y se realizará el calculo del VaR para el siguiente periodo y así sucesivamente hasta el último dato de la muestra.

Para calcular el VaR para cada uno de los últimos 250 periodos de la muestra debemos calcular las 250 ventas una tras otra, lo cual se puede realizar fácilmente empleando un "loop". Esto se puede realizar de manera muy sencilla empleando el siguiente código.

```
>  Back.testing.VaR.MA<-matrix(nrow=250, ncol=1)
>  Back.testing.VaR.EWMA<-matrix(nrow=250, ncol=1)
>  Back.testing.VaR.GARCH<-matrix(nrow=250, ncol=1)
>
>  for(i in 1:250) {
>    n<-length(tcrm)-(250-i+1)
>    Back.testing.VaR.MA[i]<-VaR.MA(tcrm[1:n,], 0.01, 2)
>    Back.testing.VaR.EWMA[i]<-VaR.EWMA(tcrm[1:n,], 0.01, 0.95)
>    Back.testing.VaR.GARCH[i]<-VaR.GARCH(tcrm[1:n,], 0.01)
>                   }
```

Y ahora calculamos la proporción de las excepciones y el estadístico de Kupiec para cada uno de los métodos empleando :

```
> ma.pronostico   <- as.numeric(Back.testing.VaR.MA)
> ewma.pronostico <- as.numeric(Back.testing.VaR.EWMA)
> garch.pronostico <- as.numeric(Back.testing.VaR.GARCH)
>
> # excepciones
> excepciones.ma <-(-1)*((-1)*rtcrm[2603:2852]*tcrm[2603:2852])>
  ma.pronostico
> excepciones.ewma <-(-1)*((-1)*rtcrm[2603:2852]*tcrm[2603:2852])>
 ewma.pronostico
```

```
> excepciones.garch <- (-1)*((-1)*rtcrm[2603:2852]*tcrm[2603:2852] )>
  garch.pronostico
>
>  # p gorro
> p.gorro.ma<- sum(excepciones.ma)/length(excepciones.ma)
> p.gorro.ewma<- sum(excepciones.ewma)/length(excepciones.ewma)
> p.gorro.garch<- sum(excepciones.garch)/length(excepciones.garch)
>  # Estadístico de kupiec
>
>  kupiec.ma<-kupiec.est(p.gorro.ma, 0.01, 250)
>  kupiec.ewma<-kupiec.est(p.gorro.ewma, 0.01, 250)
>  kupiec.garch<-kupiec.est(p.gorro.garch, 0.01, 250)
```

El objeto "*kupiec.ma*" contiene el estadístico calculado de Kupiec y el p-valor con el cual es posible rechazar la hipótesis nula de que el porcentaje de excepciones es igual al teóricamente esperado.

Los resultados de estas pruebas se resumen en el cuadro 5. Noten que para el caso de las aproximaciones que emplean la media móvil y el EWMA se puede rechazar la hipótesis nula de que la proporción de excepciones es igual al nivel de insignificancia. De hecho en Alonso y Semaán (2009) también habíamos encontrado que todas las aproximaciones que consideradas con el supuesto de una varianza constante permitía rechazar la hipótesis nula de que la proporción de excepciones es igual al nivel de insignificancia, al considerar la misma muestra para la TCRM.

Por otro lado, para el caso del GARCH, no se puede rechazar la hipótesis nula, lo cual implica que esta aproximación presenta una proporción de excepciones estadísticamente similar al nivel de significancia. De esta manera, podemos concluir para esta muestra de la TCRM que la aproximación que emplea el modelo GARCH para calcular es la más adecuada cuando se compara con aproximaciones que suponen una varianza constante y las aproximaciones de media móvil y EWMA que permiten actualizar la varianza para cada periodo.

Cuadro 5: Proporción de excepciones $\hat{\rho}$ y estadístico de Kupiec t_u para las diferentes aproximaciones

Aproximación	$\hat{\rho}$	t_u	$p - valor$
Varianza Móvil	0.064	3.488477	0.0005742349
EWMA	0.084	4.218075	3.452338e-05
GARCH(1,1)	0.008	-0.3549761	0.722908

Referencias

J. Alonso y L. Berggrun. *Introducción al análisis de riesgo financiero*. Colección Discernir. Serie Ciencias Administrativas y Económicas, Universiidad Icesi, 2008.

J. Alonso y P. Semaán. Cálculo del valor en riesgo y pérdida esperada mediante *R*: Empleando modelos con volatilidad constante. *Apuntes de Economía*, 21, 2009.

J. C. Alonso y M. A. Arcos. Hechos estilizados de las series de rendimientos: Una ilustración para colombia. *Estudios Gerenciales*, 22(110), 2006.

T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

Z. Ding, C. W. Granger, y R. F. Engle. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1):83 – 106, 1993.

R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

P. Kupiec. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, 3:73–84, 1995.

B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4):394, 1963.