
Proyectando el Producto Departamental Bruto Caucano con un modelo de Análisis Factorial Dinámico

Julio César Alonso C.

icalonso@icesi.edu.co

Director

CIENFI

Universidad Icesi

Centro de Investigaciones en Economía y Finanzas (CIENFI)
Departamento de Economía – Departamento de Finanzas

Octubre de 2006



Nota Aclaratoria

En la propuesta inicial para la construcción de un modelo de proyecciones para el Cauca se proponía emplear, siguiendo a Perfetti y Muños (2003), un “modelo VEC” que “es un híbrido de dos métodos de proyección: i) indicadores adelantados y ii) metodología Box and Jenkins”. En la revisión bibliográfica de la literatura técnica, se encontró que las discusiones técnicas demuestran que el método inicialmente planteado presenta problemas metodológicos graves al emplear técnicas como el análisis factorial convencional que sólo es válido para series estacionarias (I(0)).

Dado que una buena cantidad de las series con que se trabajaron en este documento son no estacionarias (y en general su orden de integración no es igual), y que está demostrado que la aproximación metodológica sugerida por Perfetti y Muños (2003) y por nuestra propuesta inicial es incorrecta, hemos decidido emplear una metodología de última generación y de mayor grado de sofisticación como es un modelo de análisis factorial dinámico que nos permite evitar incurrir en errores metodológicos ampliamente documentados en la literatura internacional.

1 Introducción

Conocer el comportamiento futuro del nivel de actividad económica de una región no es tarea fácil, pero necesaria. Para la toma de decisiones en cualquier tipo de organización es imperativo contar con algún grado de certidumbre frente al futuro. En particular, el comportamiento futuro del nivel de actividad económica es indispensable para cualquier proceso de planeación en el sector público y en algunos casos en el privado.

Los pronósticos del nivel de actividad económica no son un fin en sí mismos, por el contrario estos deben ser entendidos como la base para los procesos de planeación e implementación de, por ejemplo, políticas públicas. La necesidad de obtener pronósticos macroeconómicos precisos ha incentivado la producción de una basta literatura en el tema. Se han desarrollado diferentes tipos de modelos para pronosticar empleando diferentes tipos de metodologías y de bases de datos.

Las opciones “tradicionales” de modelos de series de tiempo van desde modelos univariados tipo ARIMA hasta modelos multivariados VAR. Pero paralelo al desarrollo de la literatura clásica de las series de tiempo, han aparecido otras aproximaciones. Geweke (1977) inició una agenda de investigación al presentar una generalización del análisis clásico factorial a las series de tiempo, lo que permite explotar las interrelaciones dinámicas de las variables.

Recientemente, Forni, Hallin, Lippi, and Reichlin (2002) desarrollaron el modelo de análisis factorial dinámico generalizado que departe de los modelos tradicionales de series de tiempo. Estos autores sugieren un modelo que permite predecir el comportamiento de variables económicas sacando ventaja de los factores comunes a las variables consideradas y a las particularidades de cada una de estas series.

El objetivo de este documento es estimar un modelo de análisis factorial dinámico generalizado para la economía caucana que permite calcular proyecciones del comportamiento de su Producto Departamental Bruto. El documento está organizado de la siguiente manera: la segunda parte presenta brevemente el modelo, mientras que la tercera parte discute los datos empleados. En la cuarta sección se presenta el modelo

estimado y se discuten los resultados. La última sección presenta proyecciones para el comportamiento del PIB del Cauca para el periodo 2003-2012.

2 El Modelo

El modelo empleado en este documento corresponde al modelo de Forni, Hallin, Lippi y Reichlin (2003) (de aquí en adelante FHLR) conocido con el nombre de modelo de Análisis Factorial Dinámico Generalizado (GDFAM por su sigla en inglés). Este tipo de modelos ha sido diseñado para emplear paneles grandes de series de tiempo, en especial cuando el número de variables tiende a ser más grande que el número de períodos.

La idea detrás de este modelo es sencilla, cada una de las series consideradas se supone corresponde a la suma de dos partes: una común a todo el panel y otra idiosincrática (o propia a la serie). El componente común de las series se supone que responde a algunos factores comunes no observables. En principio, estos factores pueden ser identificados aplicando un “filtro” a los datos incluyendo rezagos de ser necesario.

El modelo propuesto por FHLR tiene la ventaja de explotar la relación entre diferentes variables en diferentes momentos del tiempo, comportamiento que se puede capturar en la estructura dinámica de la covarianza de los datos. Esta característica distingue al GDFAM de otras aproximaciones para pronosticar el nivel de actividad económica, como los modelos de Stock y Watson (2002) o Sargent y Sims (1977), tal como lo demuestran FHLR (2003).

En la década del 70, con el fin de realizar pronósticos del nivel de actividad económica se empleó el análisis factorial tradicional (ver por ejemplo Sargent y Sims (1977) y Geweke (1977), para el caso de una aplicación al caso de la economía caldense ver Perfetti y Muños (2003)). La aproximación de emplear el análisis factorial tradicional ha sido demostrada no ser una buena idea, pues supone que cada una de las variables está idénticamente e independientemente distribuida. Esto implica que la media y la varianza son constantes e iguales para todas las variables consideradas.

Estos supuestos del modelo tradicional de análisis factorial son razonables cuando se estudian datos de corte transversal, pero al emplear series de tiempo este supuesto deja

de serlo. De hecho la presencia de raíces unitarias y/o heteroscedasticidad en las series hace poco razonable el emplear este tipo de análisis convencional con series de tiempo económicas.

Entrando en el detalle del modelo, se tiene que cada variable en el panel conformado por n variables ($x_{i,t}$ para $t = 1, \dots, T$) se puede expresar como la suma de dos componentes no observables: el componente común (χ_{it}) y el idiosincrático (ζ_{it}). Es decir,

$$x_{it} = \chi_{it} + \zeta_{it} \quad (1)$$

El componente común (χ_{it}) se encuentra conducido por un vector de factores comunes de tamaño q dado por $u_t = (u_{1t} \ u_{2t} \ \dots \ u_{qt})^T$. Estos factores comunes son también conocidos como choques comunes y se supone siguen un comportamiento de ruido blanco con varianzas uno y mutuamente ortogonales entre sí. De tal forma que

$$\chi_{it} = b_i(L)u_t \quad (2)$$

Donde $b_i(L) = b_{i1}(L) + b_{i2}(L) + \dots + b_{iq}(L)$ es un vector de polinomios rezagados. Así mismo se supone que ζ_{it} es ortogonal con respecto a u_{t-k} para todo i y k . Una descripción más detallada del GDFAM y todos sus supuestos se pueden encontrar en FHLR (2000).

Así, se cuenta con n variables observadas (también denominadas los indicadores), los cuales pueden ser explicados a partir de q factores comunes no observados y por su respectivo comportamiento idiosincrático. Dado que el componente común y el componente idiosincrático son ortogonales, entonces el proceso de proyección por medio de un GDFAM se puede dividir en dos problemas de proyección: pronosticar el componente común y pronosticar el componente idiosincrático.

Dado que todos los ζ_{it} son ortogonales entre sí, en el peor de los escenarios levemente correlacionados (weakly correlated) entre sí, entonces éstos componentes pueden ser proyectados empleando métodos convencionales como modelos ARIMA¹ o VAR.

¹ En nuestro caso el componente idiosincrático fue estimado por medio de modelos ARIMA que fueron seleccionados minimizando criterios de información como los de Akaike, Hannan-Quinn y Schwarz.

Por otro lado, el pronóstico h-pasos adelante del componente común implica encontrar el mejor “predictor” lineal para $\chi_{i,T+h}$, el cual no es más que la proyección en el espacio generado por los componentes comunes obtenidos por un filtro lineal de los datos. Es decir:

$$\phi_{i,T+h|T} \equiv \text{proj}(\chi_{i,T+h} | G(\chi, T)) = \sum_{j=1}^q \sum_{k=h}^{\infty} b_{ij,k} u_{j,T+h-k} \quad (3)$$

Sin embargo, como lo destacan FHRLR (2003) el coeficiente $b_{ij,k}$ depende en un filtro de dos lados y por tanto no es apropiado para pronosticar. Para resolver el problema FHRLR (2003) proponen un filtro de un solo lado dado por $W_{nt}^{kT} \equiv Z_{nk}^T x_{nt}$ donde Z_{nk}^T corresponde a unos pesos que pueden ser encontrados solucionando el siguiente problema:

$$\begin{aligned} Z_{nk}^T &:= \arg \max_{a \in \mathbb{R}^n} \text{var}(a \chi_{n,t}^T) \\ \text{sujeto a } &\text{var}(a \zeta_{n,t}^T) = 1 \\ &a \zeta_{n,t}^T \perp Z_{nm}^T \zeta_{n,t}^T \\ \text{para } &1 \leq m \leq l, 1 \leq l \leq n \end{aligned} \quad (4)$$

Donde a representa el valor propio producto de resolver el problema del valor propio generalizado. A partir de esta matriz de pesos, FHRLR (2003) proponen la siguiente matriz de proyecciones:

$$\tilde{\phi}_{i,T+h|T} \equiv \Gamma_{nh}^{\chi^T} Z_n^T \left(Z_n^T \Gamma_{n0}^{\chi^T} Z_n^T \right)^{-1} Z_n^T x_{nT} \quad (5)$$

Con $\Gamma_{n0}^{\chi^T}$ representando la matriz de varianzas y covarianzas de la matriz de datos. FHRLR (2003) demuestran que a medida que el tamaño de la muestra crece, entonces $\tilde{\phi}_{i,T+h|T}$ converge a χ_{it} . (Para más detalles ver FHRLR (2003))

Así, nuestro objetivo será emplear el filtro descrito en (5) para un panel de datos relevantes para determinar el nivel de actividad económica del departamento del Cauca (ver siguiente sección para una breve discusión de los datos). Para efectuar la estimación de este modelo, se sigue a FHRLR (2003). No obstante, un factor determinante del comportamiento del modelo es la determinación del número de actores comunes (q).

Existen algunas estrategias para determinar el q “correcto”. Por ejemplo, se pueden adoptar criterios de información como el de Akaike o una modificación de esta propuesta por Bai y Ng (2002), otra aproximación empleada para calcular los valores propios dinámicos y la correspondiente varianza explicada por cada uno de los factores. Lo convencional, es emplear el número de factores hasta que el valor propio dinámico sea superior a uno y/o la contribución marginal del factor sea relativamente baja (menor a 4% o 3% es considerado relativamente bajo).

3 Datos

La base de datos disponible para el estudio corresponde a una amplia base de datos construida para el departamento del Cauca en el marco del proyecto “Impacto Socio-económico de la Ley Páez sobre el departamento del Cauca”. Esta base de datos está compuesta por más de 100 variables que cubren diferentes aspectos, periodos y periodicidades. De esta base de datos se emplean 28 variables que cubren el periodo 1960-2002 con una periodicidad anual. Estas series fueron escogidas siguiendo dos criterios: i) las series estuvieran completas para todo el periodo, y ii) no presentaran comportamientos anormales que no pudieran ser explicados.

Los datos empleados se pueden dividir en tres grande grupos (Ver Tabla 1): Variables del sector agrícola, nivel de actividad económica en general y otras. Es importante resaltar que el hecho de tener más variables agrícolas en nuestra base de datos, no implica nada sobre el peso que el modelo le asigne a dichas variables. Es decir, la carga de los factores no se ve afectada por este hecho.

Tabla 1. Variables consideradas

<i>Sector Agrícola</i>	<i>Nivel de actividad económica en general</i>
Hectareas cultivadas de Arroz	PIB Cauca (precios constantes)
Hectareas cultivadas de Cacao	PIB Nariño (precios constantes)
Hectareas cultivadas de Café	PIB Huila (precios constantes)
Hectareas cultivadas de Caña	PIB Valle (precios constantes)
Hectareas cultivadas de fique	PIB Colombia (precios constantes)
Hectareas cultivadas de Maíz	
Hectareas cultivadas de Papa	Otros
Producción de arroz (q/ton)	Valor Agregado industrial del Cauca (precios constantes)
Producción de café (q/ton)	Valor Agregado industrial del Valle (precios constantes)
Producción de caña (q/ton)	Valor Agregado industrial de Nacional (precios constantes)
Producción de fique (q/ton)	Consumo de energía eléctrica TOTAL (KWH) C
Producción de maíz (q/ton)	M2 Aprobados
Producción de papas (q/ton)	Exportaciones del Cauca (precios constantes)
Sacrificio Vacuno (Unidades)	Importaciones del Cauca (precios constantes)
	No. de sociedades constituidas
	Capital en constitucion de sociedades (precios constantes)

4 Determinación del modelo: Elección de q

Dado que los resultados de Boivin y Ng (2003) y Watson (2000) sugieren la posibilidad de que este tipo de modelos puede funcionar mejor con pocos datos (variables) que con una base de datos muy grande, se procedió a evaluar la posibilidad de emplear menos variables en el modelo de proyecciones.

Para la determinación del mejor modelo se evaluará el comportamiento de las proyecciones fuera de la muestra de los posibles modelos. Para este fin, se empleará una muestra que corresponde al período 1960-1999 para estimar el modelo y se proyectará para los años 2000, 2001 y 2002 a partir del modelo estimado. La evaluación del comportamiento de las proyecciones de los modelos se hará de acuerdo a dos criterios: la raíz del error medio cuadrado (RMSE por su sigla en inglés root mean squared error) y error absoluto medio (MAE por su sigla en inglés mean absolute error).

Así, para tener en cuenta que la determinación de q no es tarea fácil, entonces la evaluación de los modelos se llevará a cabo para un número de variables dadas de acuerdo a los siguientes pasos: i) se calculan los valores propios dinámicos, la contribución % a la explicación de la varianza común por factor para establecer el número máximo de factores a considerar, ii) dado el q máximo se estima el modelo, se calculan las proyecciones del PIB del Cauca para los tres años y se calculan el RMSE y el MAE, y iii) se considera el caso de $q-1$ factores y se retorna a ii).

Con el fin de comparar el comportamiento de nuestro método de estimaciones con métodos tradicionales, paralelo a este ejercicio se emplean un modelo ARIMA (para el PIB del Cauca) y un modelo VAR² para obtener proyecciones del PIB caucano. Estas proyecciones también son evaluadas empleando los mismos criterios. Empleando las 28 variables se encuentra que el factor 13 es el último factor que posee un valor propio dinámico mayor que 1 (Ver Tabla 3).

² Es importante resaltar que para el caso del modelo VAR no se pudo emplear toda la información en la base de datos, dada la alta relación entre ellas (multicolinealidad). Esto implicaba matrices singulares al momento de la estimación. Por tanto se descartaron variables hasta terminar con un VAR de 8 variables.

En la parte superior de la Tabla 2 se presentan los resultados de la evaluación de las proyecciones con las 28 variables y diferente número de factores. Como se puede observar, al emplear 13 factores ($q=13$) se minimizan tanto RMSE como el MAE. Es más, cuando se comparan los resultados obtenidos por métodos convencionales como el ARIMA y el VAR, se encuentra que estos métodos no superan al comportamiento del GDFAM para $q=13$.

Tabla 2. Comportamiento de las proyecciones de los diferentes modelos estimados

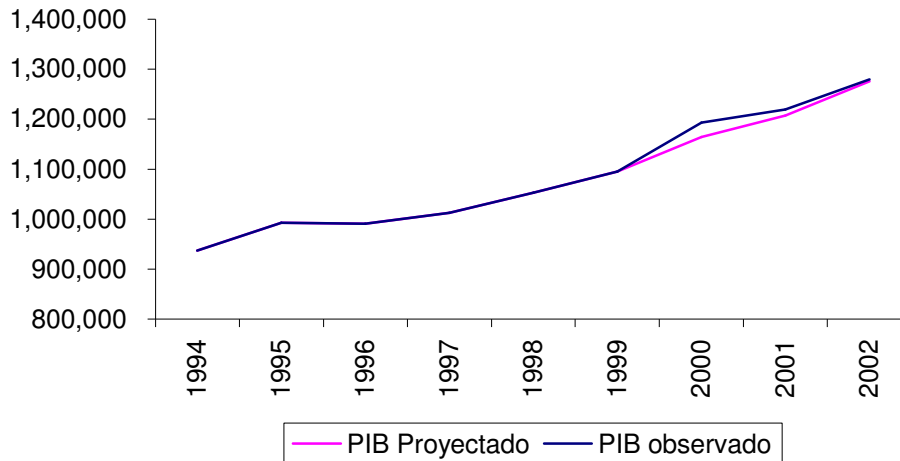
<i>Todas las variables (n=28)</i>						
	q=14	q=13	q=12	q=11	q=10	q=9
RMSE	0.0305	0.0181	0.0558	0.0348	0.0289	0.0316
MAE	0.0212	0.0158	0.0424	0.0317	0.0218	0.0211
	q=8	q=7	q=6	ARIMA		VAR
RMSE	0.0326	0.0331	0.0354	0.0324		0.0294
MAE	0.0201	0.0202	0.0231	0.0251		0.0244
<i>Subgrupo de variables (n=14)</i>						
	q=8	q=7	q=6	q=5		
RMSE	0.0299	0.0394	0.0308	0.0388		
MAE	0.0224	0.0310	0.0214	0.0280		
<i>Subgrupo de variables (n=10)</i>						
	q=5	q=4	q=3			
RMSE	0.0301	0.0294	0.0312			
MAE	0.0223	0.0202	0.0206			

Para tener en cuenta la posibilidad de que el modelo se comporte mejor con menos variables, se replica el mismo ejercicio para un subconjunto de 14 y de 10 variables³. Las variables de estos subconjuntos fueron seleccionadas empleando aquellas que poseen una mayor correlación dinámica (para un ancho de banda equivalente a un periodo de 1 a 5 años) sugerida por Croux, Forni y Reichlin L. (2001).

Los resultados de estos otros dos ejercicios se presentan en la Tabla 2. Estos resultados refuerzan la idea de que el mejor comportamiento de los pronósticos fuera de muestra está dado por el modelo que incluye las 28 variables y 13 factores. Este resultado se puede explicar dado el relativamente bajo número de variables que se está empleando en nuestro estudio.

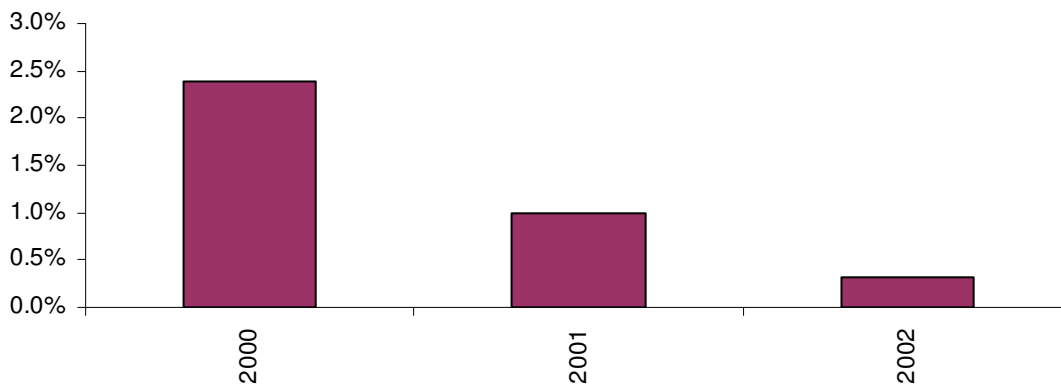
³ También se consideraron modelos con otro número de variables, pero el resultado es el mismo. Para ahorrar espacio, no se presentan esos modelos.

Gráfico 1. Comparación de la Proyecciones del PIB Caucano y el Observado (2000-2002) (millones de \$ de 1994)



En el Gráfico 1 se presenta una comparación entre el PIB estimado por nuestro GDFAM y el PIB observado, la diferencia entre estas dos cifras corresponde a un 2.385% del PIB observado. Es decir, existe un error en las estimaciones de 2.385% (Ver Gráfico 2). Para el año 2001 el error en nuestro pronóstico es de 0.988% y de 0.307% para el 2002. Estos resultados, son muy buenos, y ponen de manifiesto que ocurrió algo en el 2000 que no pudo ser capturado por el modelo, de ahí el error para ese año, que si bien es pequeño, es relativamente superior al obtenido para los otros años.

Gráfico 2. Comparación de la Proyecciones del PIB Caucano y el Observado (2000-2002) (millones de \$ de 1994)



5 Proyecciones, una aplicación y comentarios finales.

Una vez determinado que el modelo que presenta el mejor comportamiento corresponde al que incluye las 28 variables y 13 factores, se procede a estimar este mismo modelo pero con toda la muestra, es decir, para el periodo 1960-2002. A partir de este modelo estimado se procede a pronosticar el comportamiento del PIB para los siguientes 10 años.

Los resultados de estas proyecciones se presentan en el Gráfico 3 y Gráfico 4. De acuerdo a nuestro modelo de proyecciones de continuar las condiciones existentes hasta el 2002, el PIB caucano seguirá un crecimiento promedio de 3.7% anual para el periodo 2003-2012. Las tasas de crecimiento anuales se presentan en el Gráfico 4.

Gráfico 3. Proyecciones del PIB Caucano (millones de \$ de 1994)

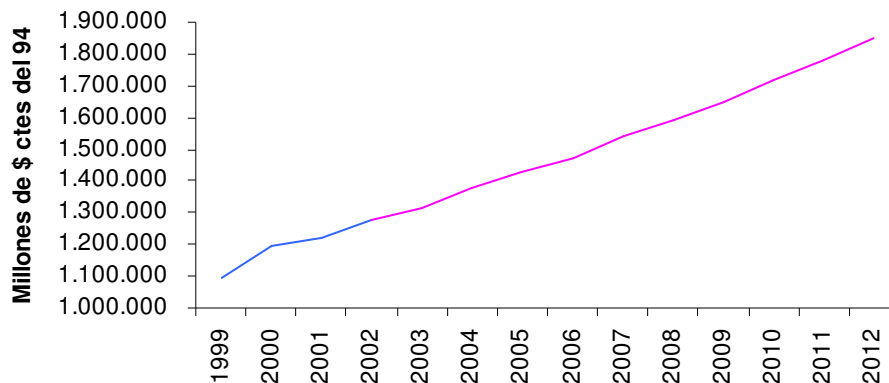
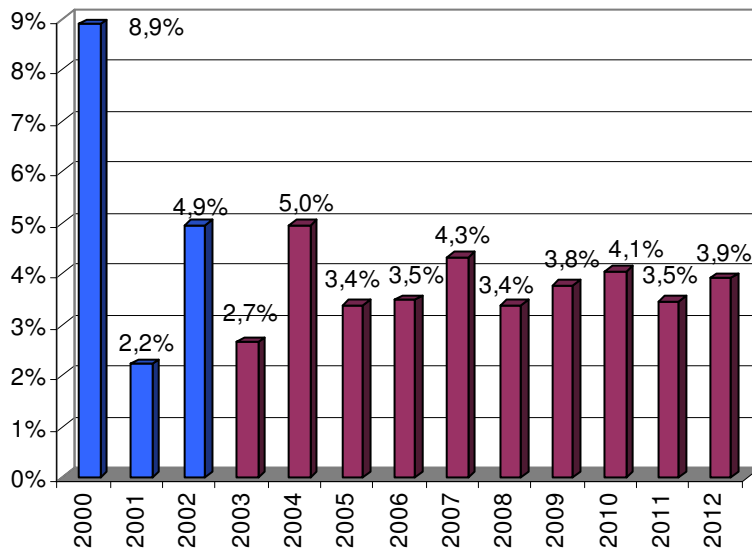


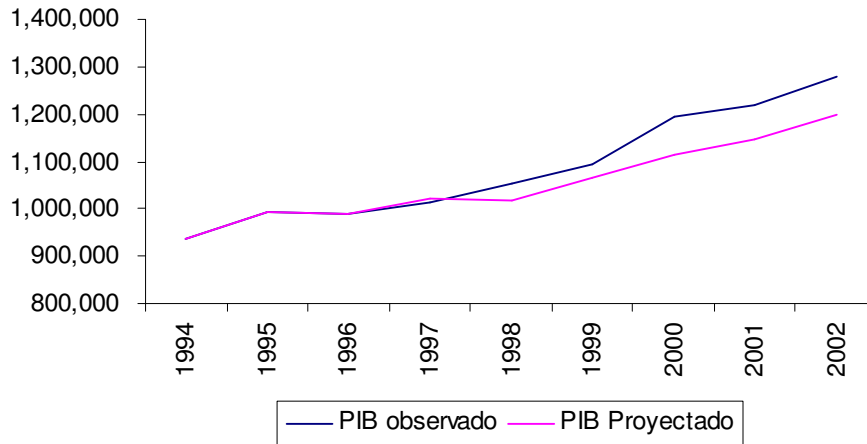
Gráfico 4. Proyecciones del crecimiento del PIB Caucano



Es importante resaltar la implementación de un Modelo de Análisis Factorial Dinámico Generalizado, que ha permitido sacar ventaja a la base de datos construida en el marco del proyecto “Impacto Socio-económico de la Ley Páez sobre el departamento del Cauca”. Este modelo explota la correlación entre todas las variables consideradas no solo contemporáneas sino dinámicas, siendo en principio superior a otro tipo de aproximaciones como los modelos ARIMA o VAR: Este modelo permitirá evaluar el comportamiento pasado o futuro de la economía caucana para diferentes escenarios.

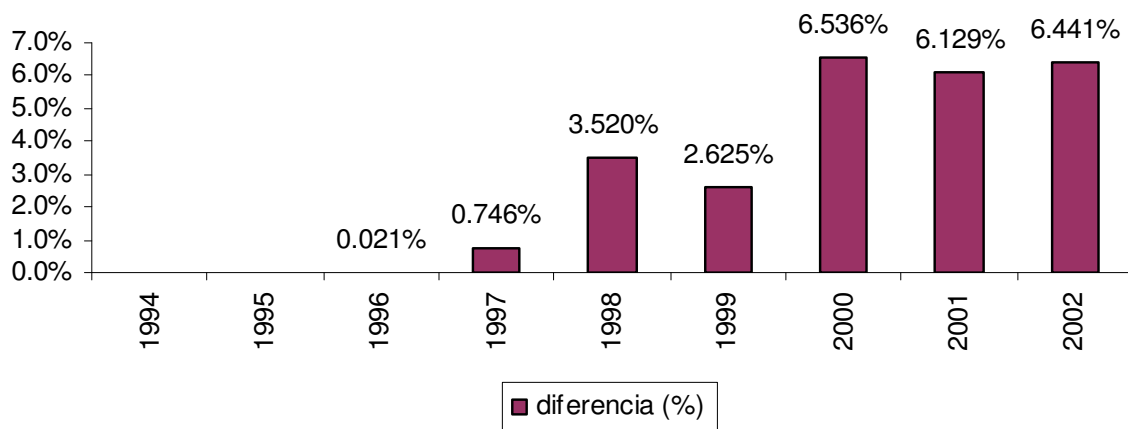
Por ejemplo, este tipo de modelos puede ser empleado para estimar el efecto de un cambio estructural trascendental para la economía caucana como lo es la Ley Páez. Empleando la muestra para el período 1960-1996, se puede estimar nuestro GDFAM y realizar proyecciones para los siguientes 6 años (1997 a 2002) para determinar cuál hubiera sido la dinámica de comportamiento el PIB caucano si las condiciones existentes antes de 1996 se hubieran mantenido. Y posteriormente podemos comparar estos resultados con el PIB observado para determinar el efecto del cambio estructural provocado por la ley Páez. Los resultados de este ejercicio se presentan en Gráfico 5.

Gráfico 5. Comparación de la Proyecciones del PIB Caucano sin cambio estructural de la Ley Páez y el Observado (1997-2002) (millones de \$ de 1994)



Como se puede observar, el comportamiento es relativamente superior al obtenido para los otros años. De hecho, al 2002 se observa una diferencia de 1.7% para los primeros cuatro años evaluados y una diferencia promedio de 6.4% para los tres últimos años evaluados.

Gráfico 6. Comparación de la Proyecciones del PIB Caucano sin cambio estructural de la Ley Páez y el Observado (1996-2002) (millones de \$ de 1994)



Así, de acuerdo a la aplicación de nuestro modelo de proyecciones se ha podido cuantificar la magnitud del efecto de la Ley Páez sobre el PIB Caucano.

Para culminar, es importante resaltar no sólo la utilidad del modelo para proveer pronósticos sobre el comportamiento futuro de la economía sino también como herramienta de evaluación y de diseño de políticas públicas.

Por ejemplo, las proyecciones del comportamiento del PIB caucano pueden permitir identificar los puntos de cambio del comportamiento del PIB en el corto plazo (ya sean que se presente un crecimiento mayor o menor que el esperado), este cambio en el comportamiento observado frente al esperado permitirá encender luces de alerta para que las autoridades locales y/o nacionales tome las medidas del caso, ya sea para retornar a la senda esperada o para modificar esta senda esperada si no concuerda con los objetivos de política de largo plazo.

6 Referencias

- Altissimo, F., A. Bassanetti, R. Cristadero, M. Forni, M. Lippi, L. Reichlin, y G. Veronese (2001): "EuroCOIN: A real time coincident indicator of the Euro Area business cycle," CEPR discussion paper 3108, Center for Economic and Policy Research.
- Bai, J. y S. Ng (2002): "Determining the Number of Factors in Approximate Factor Models," *Econometrica*, 70, 191–221.
- Cristadero, R., M. Forni, L. Reichlin, y G. Veronese (2001): "A core inflation index for the Euro Area," mimeo.
- Croux, C., Forni M. y Reichlin L. 2001. "A Measure Of Comovement For Economic Variables: Theory And Empirics." *The Review of Economics and Statistics*, 83:2, pp. 232-41.
- Forni, M., M. Hallin, M. Lippi y L. Reichlin (2001). "Coincident and leading indicators for the Euro area". *The Economic Journal* 111, 62-85.
- Forni, M., M. Hallin, M. Lippi y L. Reichlin (2003): "The generalized dynamic factor model: One-sided estimation and forecasting," Discussion paper, LEM Working Paper Series.
- Geweke, J. (1977): "The dynamic factor analysis of economic time series," in *Latent variables in socio-economic models*, ed. por D. Aigner, y A. Goldberger, pp. 365–383. Amsterdam: North Holland.
- Perfetti y Muños (2003) "Pronósticos del Producto de Caldas con Base en la Utilización de indicadores sintéticos incorporados en un modelo VEC" en *Observatorio de La competitividad de Caldas, CRECE*
- Sargent, T. J., y C. A. Sims (1977): "Business cycle modelling without precluding to have too much a priori economic theory," in *New methods in business research*, editores C. Sims. Federal reserve bank of Minneapolis.

Stock, J. H., y M. W. Watson (1991): "A probability model of the coincident indicators," in *Leading economic indicators: New approaches and forecasting record*, editores K. Lahiri, and G. Moore, pp. 63–95. Cambridge University Press.

Stock, J. H., y M. W. Watson (1998): "Diffusion indexes," NBER working paper 6702, National Bureau of Economic Research.

Stock, J. H., y M. W. Watson (2002): "Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes," *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 147–162.

ANEXO

Tabla 3. Porcentaje total de varianza explicada por los primeros q factores para n=28

q	Valor propio (promedio sobre frecuencias)	% de la Varianza	% Acumulado
1	3.04	10.86	10.86
2	2.81	10.05	20.91
3	2.42	8.64	29.54
4	2.24	7.98	37.53
5	2.01	7.17	44.70
6	1.69	6.05	50.75
7	1.60	5.70	56.45
8	1.36	4.86	61.31
9	1.27	4.54	65.85
10	1.22	4.34	70.19
11	1.14	4.06	74.25
12	1.06	3.78	78.02
13	1.02	3.64	81.67
14	0.89	3.20	84.86
15	0.75	2.66	87.53
16	0.63	2.25	89.78
17	0.55	1.95	91.73
18	0.46	1.65	93.38

Tabla 4. Porcentaje total de varianza explicada por los primeros q factores para n=14

q	Valor propio (promedio sobre frecuencias)	% de la Varianza explicada	% Acumulado
1	2.44	15.23	15.23
2	2.05	12.83	28.06
3	1.86	11.64	39.70
4	1.41	8.84	48.54
5	1.25	7.83	56.37
6	1.13	7.08	63.45
7	1.07	6.68	70.13
8	1.03	6.41	76.54
9	0.94	5.85	82.39
10	0.73	4.57	86.96
11	0.64	4.03	90.99
12	0.47	2.96	93.94
13	0.36	2.25	96.19
14	0.26	1.62	97.81
15	0.19	1.21	99.02
16	0.16	0.98	100.00

Tabla 5. Porcentaje total de varianza explicada por los primeros q factores para n=10

q	Valor propio (promedio sobre frecuencias)	% de la Varianza explicada	% Acumulado
1	1.73	17.29	17.29
2	1.67	16.68	33.97
3	1.49	14.88	48.85
4	1.14	11.43	60.28
5	0.98	9.76	70.04
6	0.92	9.17	79.21
7	0.74	7.39	86.61
8	0.59	5.87	92.48
9	0.45	4.53	97.01
10	0.30	2.99	100.00